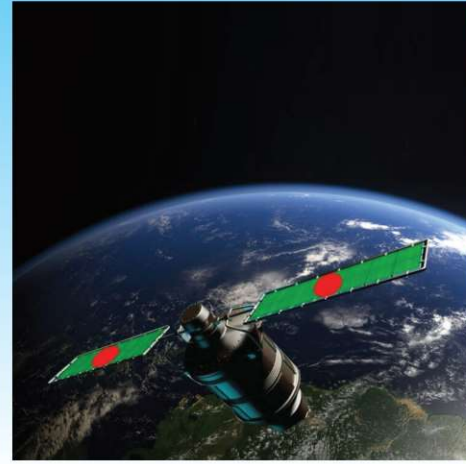


তথ্য ও যোগাযোগ প্রযুক্তি

একাদশ-দ্বাদশ ও আলিম শ্রেণি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

তৃতীয় অধ্যায় সংখ্যা পদ্ধতি ও ডিজিটাল ডিভাইস

Number Systems and Digital Devices



আন্তর্জাতিক রোবটিক প্রতিযোগিতায় বাংলাদেশের শিক্ষার্থীদের অংশগ্রহণ

মানব সভ্যতার ইতিহাসে বিজ্ঞান এবং প্রযুক্তি অনেক বড় ভূমিকা পালন করেছে। আমরা সবাই জানি আধুনিক সভ্যতার ইতিহাসে কম্পিউটার এবং তার সাথে সম্পর্কযুক্ত অন্যান্য ইলেকট্রনিক যন্ত্রপাতির অবদান সবচেয়ে বেশি। একসময় যে কম্পিউটারটি বসানোর জন্য একটি পুরো বিল্ডিংয়ের প্রয়োজন হতো এখন তার চাইতেও শক্তিশালী একটি কম্পিউটার ব্যবহার করে তৈরি একটি মোবাইল ফোন আমরা আমাদের পকেটে নিয়ে ঘুরে বেড়াই। এই কম্পিউটার এবং তার সাথে আনুষঙ্গিক যন্ত্রপাতি ইলেকট্রনিক্সের যে শাখার উপর নির্ভর করে গড়ে উঠেছে সেটি হচ্ছে ডিজিটাল ইলেকট্রনিক্স। এই অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ শাখাটি দুইভিত্তিক বাইনারি সংখ্যা এবং বুলিয়ান অ্যালজেবরা নামে বিস্ময়করভাবে সহজ একটি গাণিতিক কাঠামো দিয়ে ব্যাখ্যা করা হয়। এই অধ্যায়ে শিক্ষার্থীদের সেই বিষয়গুলোর সাথে পরিচয় করিয়ে দেয়া হবে।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- সংখ্যা আবিষ্কারের ইতিহাস বর্ণনা করতে পারবে;
- সংখ্যা পদ্ধতির ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- সংখ্যা পদ্ধতির প্রকারভেদ বর্ণনা করতে পারবে;
- বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা পদ্ধতির আন্তঃসম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে;
- বাইনারি যোগ-বিয়োগ সম্পন্ন করতে পারবে;
- চিহ্নযুক্ত সংখ্যার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- ২- এর পরিপূরক নির্ণয় করতে পারবে;
- কোডের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- বিভিন্ন প্রকার কোডের তুলনা করতে পারবে;
- বুলিয়ান অ্যালজেবরার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে;
- বুলিয়ান উপপাদ্যসমূহ প্রমাণ করতে পারবে;
- লজিক অপারেটর ব্যবহার করে বুলিয়ান অ্যালজেবরার ব্যবহারিক প্রয়োগ করতে পারবে;
- বুলিয়ান অ্যালজেবরার সাথে সম্পর্কিত ডিজিটাল ডিভাইসসমূহের কর্মপদ্ধতি বিশ্লেষণ করতে পারবে।

৩.১ সংখ্যা পদ্ধতি আবিষ্কারের ইতিহাস (History of Inventing Numbers)

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা প্রতিনিয়ত ভাষা এবং একই সাথে সংখ্যাকেও ব্যবহার করি। আমাদের প্রয়োজনের কারণে ভাষার সাথে সাথে আমরা সংখ্যা পদ্ধতি আবিষ্কার করেছি। সত্যি কথা বলতে কী, অনেক প্রাণী এবং পাখিও অল্প কিছু গুনতে পারে। শুনে অবাক হয়ে যেতে হয় যে এখনো পৃথিবীর গহিন অরণ্যে এমন আদিবাসী মানুষ আছে, যাদের জীবনে সংখ্যার বিশেষ প্রয়োজন হয় না বলে সেভাবে গুনতে পারে না। ব্রাজিলের পিরাহা নামের আদিবাসীরা এক এবং দুই থেকে বেশি গুনতে পারে না। এর চাইতে বেশি যে কোনো সংখ্যা হলেই তারা বলে ‘অনেক’।

আদিম মানুষ যখন শিকারি হিসেবে বনে-জঙ্গলে ঘুরে বেড়াত তখন হিসেব রাখা বা গোনার সেরকম প্রয়োজন ছিল না। যখন তারা কৃষিকাজ করার জন্য থিতু হয়েছিল, গবাদি পশু পালন করতে শুরু করেছে, শস্যক্ষেত্রে চাষাবাদ করেছে, গ্রাম, নগর-বন্দর গড়ে তুলেছিল, রাজস্ব আদায় করা শুরু করেছে তখন থেকে গোনার প্রয়োজন শুরু হয়েছে। সেজন্য সংখ্যা পদ্ধতির ইতিহাস এবং সভ্যতার ইতিহাস খুবই ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। আমাদের প্রয়োজনের কারণে এখন আমরা অনেক বড় বড় সংখ্যা ব্যবহার করতে পারি, গণিতের সাহায্যে সেগুলো নানাভাবে প্রক্রিয়া করতে পারি।

আদিমকালে মানুষেরা গাছের ডাল বা হাড়ে দাগ কেটে কিংবা কড়ি, শামুক বা নুড়ি পাথর সংগ্রহ করে সংখ্যার হিসাব রেখেছে। তবে যখন আরো বড় সংখ্যা আরো বেশি স্থায়ীভাবে সংরক্ষণ করার প্রয়োজন হয়েছে তখন সংখ্যার একটি লিখিত রূপ বা চিহ্ন সৃষ্টি করে নিয়েছে। প্রায় পাঁচ হাজার বছর আগে মোটামুটি একই সময়ে সুমেরিয়ান-ব্যবিলিয়ান এবং মিশরীয় সভ্যতার শুরু হয় এবং এই দুই জায়গাতেই সংখ্যার প্রথম লিখিত রূপ পাওয়া গেছে। সুমেরিয়ান-ব্যবিলিয়ান সংখ্যা ছিল ষাটভিত্তিক এবং মিশরীয় সংখ্যা ছিল দশভিত্তিক। ব্যবিলিয়ান সংখ্যা পদ্ধতির রেশ পৃথিবীতে এখনো রয়ে গেছে, আমরা মিনিট এবং ঘণ্টার হিসেব করি ষাট দিয়ে এবং কোণের পরিমাপ করি ষাটের গুণিতক দিয়ে। সুমেরিয়ান-ব্যবিলিয়ান সংখ্যা পদ্ধতিতে স্থানীয় মান ছিল, মিশরীয় সংখ্যা পদ্ধতিতে ছিল না। দুই পদ্ধতিতেই কোনো কিছু না থাকলে সেটি বোঝানোর জন্য চিহ্ন ব্যবহার করা হতো কিন্তু সেটি মোটেও গাণিতিক সংখ্যা শূন্য ছিল না।

পরবর্তীকালে আরো তিনটি সভ্যতার সাথে সাথে সংখ্যা পদ্ধতি গড়ে ওঠে, সেগুলো হচ্ছে মায়ান সভ্যতা, চীন সভ্যতা এবং ভারতীয় সভ্যতা। মায়ান সংখ্যা পদ্ধতি ছিল কুড়িভিত্তিক, চীন এবং ভারতীয় সংখ্যা পদ্ধতি ছিল দশভিত্তিক। (আমাদের দেশে যেসব মানুষ লেখাপড়ার সুযোগ পায়নি তারা কাজ চালানোর জন্য মৌখিকভাবে কুড়িভিত্তিক এক ধরনের সংখ্যা ব্যবহার করে থাকে।) মায়ান এবং ভারতীয় সংখ্যা পদ্ধতিতে স্থানীয় মান ব্যবহার করে। প্রয়োজনের কারণে সব সংখ্যা পদ্ধতিতেই শূন্যের জন্য একটি চিহ্ন থাকলেও প্রকৃত অর্থে শূন্যকে একটি সংখ্যা হিসেবে ধরে সেটিকে সংখ্যা পদ্ধতিতে নিয়ে এসে গণিতে ব্যবহার করে ভারতীয়রা এবং এই শূন্য আবিষ্কারকে আধুনিক গণিতের একটি অন্যতম যুগান্তকারী আবিষ্কার হিসেবে বিবেচনা করা হয়। মায়ান এবং চীন সংখ্যা পদ্ধতি মাত্র দুই-তিনটি (চিত্র ৩.১) চিহ্ন ব্যবহার করে লেখা হতো। কিন্তু হাতে লেখার সময় পাশাপাশি অসংখ্য চিহ্ন বসানোর বিড়ম্বনা থেকে বাঁচার জন্য ভারতীয় সংখ্যা পদ্ধতিতে 1 থেকে 9 পর্যন্ত নয়টি এবং শূন্যের জন্য একটি চিহ্ন- এভাবে দশটি চিহ্ন ব্যবহার করতে শুরু করে। আমরা এই চিহ্নগুলোকে অঙ্ক বা Digit বলি।

২৫০০ বছর আগে গ্রিকরা ব্যাবিলানিয়ান এবং মিশরীয়দের সংখ্যা পদ্ধতির উপর ভিত্তি করে তাদের পূর্ণাঙ্গ ১০ ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতি গড়ে তুলেছিল। রোমানরা গ্রিক সভ্যতার পতন ঘটানোর পর গণিতের অভূতপূর্ব বিকাশ

Hindu-Arabic	Roman	Greek	Egyptian	Babylonian	Chinese	Mayan
○				𐎶	○	⋯
I	I	A	I	𐎶	I	•
2	II	B	II	𐎶𐎶	II	••
3	III	Γ	III	𐎶𐎶𐎶	III	•••
4	IV	Δ	IIII	𐎶𐎶𐎶𐎶	IIII	••••
5	V	E	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	IIII	—
6	VI	F	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎶	—•
7	VII	Z	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎶𐎶	—••
8	VIII	H	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶	—•••
9	IX	Θ	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	𐎶𐎶𐎶𐎶	—••••
10	X	I	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	—	==
50	L	N	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	≡	==
100	C	P	⋮	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	100	==

চিত্র ৩.১: বিভিন্ন প্রাচীন সংখ্যা

Arabic সংখ্যা পদ্ধতি বলে। এখানে উল্লেখ্য যে শূন্য ব্যবহারের ফলে সংখ্যা পদ্ধতিতে বিস্ময়কর অগ্রগতি হলেও খ্রিস্টীয় শাসকেরা শূন্যকে শয়তানের রূপ বিবেচনা করায় দীর্ঘদিন সেটাকে ঠেকিয়ে রাখার চেষ্টা করেছিল।

আমাদের হাতে দশ আঙুল থাকার কারণে দশভিত্তিক সংখ্যা গড়ে উঠলেও দুই, আট কিংবা ষোলোভিত্তিক সংখ্যাও আধুনিক প্রযুক্তিতে ব্যাপকভাবে ব্যবহার করা হয়।

৩.২ সংখ্যা পদ্ধতি (Number System)

সংখ্যাকে প্রকাশ করার এবং গণনা করার পদ্ধতিকে সংখ্যা পদ্ধতি বলে। সংখ্যাকে প্রকাশ করার জন্য বিভিন্ন প্রতীক বা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। এই প্রতীকগুলোকে দুটো ভিন্ন ভিন্ন পদ্ধতিতে ব্যবহার করা যায়।

৩.২.১ সংখ্যা পদ্ধতির প্রকারভেদ (Classification of Number System)

সংখ্যা পদ্ধতিকে নন-পজিশনাল এবং পজিশনাল এই দুটি মূল পদ্ধতিতে ভাগ করা যায় :

নন-পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে প্রতীক বা চিহ্নগুলো যেখানেই ব্যবহার করা হোক, তার মান একই থাকবে। রোমান সংখ্যা হচ্ছে নন-পজিশনাল (Non positional) সংখ্যার উদাহরণ। যেমন— রোমান সংখ্যায় 5 বোঝানোর জন্য V ব্যবহার করা হয়। V, VI কিংবা VII এই তিনটি উদাহরণে V তিনটি ভিন্ন জায়গায় বসেছে, কিন্তু প্রতি ক্ষেত্রেই V চিহ্নটি 5 বুঝিয়েছে। তথা পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতির ন্যায় V যতই ডান হতে বাম দিকে সরতে (স্থান পরিবর্তন) থাকুক না কেন তার স্থানীয় মানের (একক, দশক, শতক ইত্যাদির ন্যায়) কোনো পরিবর্তন হয় না। এর কারণ হলো নন-পজিশনাল (অস্থানিক) সংখ্যা পদ্ধতিতে স্থানিক মানের অনুপস্থিতি। প্রাচীনকালে যখন সংখ্যাতত্ত্ব সেভাবে গড়ে ওঠেনি তখন নন-পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতির প্রচলন ছিল।

পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতি : এই পদ্ধতিতে চিহ্ন বা প্রতীকটিকে কোন অবস্থানে ব্যবহার করা হচ্ছে তার উপর মানটি নির্ভর করে। আধুনিক সংখ্যাতত্ত্ব গড়ে ওঠার পর পজিশনাল (Positional) সংখ্যা পদ্ধতির প্রচলন শুরু হয়েছে। আমাদের প্রচলিত দশমিক পদ্ধতি হচ্ছে পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতির উদাহরণ। কারণ 555 সংখ্যাকে ডান দিকের প্রথম অঙ্কটি 5 সংখ্যাকে বোঝালেও তার বামেরটি 50 এবং এর বামেরটি 500 সংখ্যাকে বোঝাচ্ছে। এটি 10 ভিত্তিক সংখ্যা এবং প্রত্যেকটি অবস্থানের একটি মান রয়েছে। ডান দিকের প্রথম অঙ্কটির মান 1, বামেরটি 10, এর বামেরটি 100 এভাবে আগের অবস্থান থেকে আগের অবস্থান সবসময়েই 10 গুণ বেশি। যদি এটি 8 ভিত্তিক সংখ্যা হতো তাহলে পরের অবস্থান আগের অবস্থান থেকে 8 গুণ বেশি হতো। 16 ভিত্তিক সংখ্যা হলে প্রতিটি অবস্থান আগের অবস্থান থেকে 16 গুণ বেশি হতো।

নিচে কয়েকটি পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতির উদাহরণ দেওয়া হলো।

বাইনারি সংখ্যা

আমরা সবাই দশভিত্তিক দশমিক সংখ্যার সাথে পরিচিত কিন্তু ডিজিটাল ইলেকট্রনিক্সের জন্য দশভিত্তিক সংখ্যা খুব কার্যকর নয়, দশটি চিহ্নের জন্য দশটি ভিন্ন ভিন্ন ভোল্টেজ ব্যবহার করে ইলেকট্রনিক যন্ত্রপাতি তৈরি করা বাস্তবসম্মত নয়। দুটি চিহ্নের জন্য দুটি ভোল্টেজ লেভেল তুলনামূলকভাবে অনেক সহজ। সেজন্য ডিজিটাল ইলেকট্রনিক্স আসলে 2 ভিত্তিক বা বাইনারি (Binary) সংখ্যার উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে।

দশমিক সংখ্যায় যেরকম 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এবং 9- এই দশটি চিহ্ন বা অঙ্ক (Digit) ব্যবহার করে গড়ে উঠেছে, বাইনারি সংখ্যা ঠিক সেরকম 0 এবং 1 এই দুইটি অঙ্ক ব্যবহার করে গড়ে উঠেছে। তবে সে কারণে কোনো সংখ্যাকে প্রকাশ করার জন্য তুলনামূলকভাবে বেশি অঙ্ক ব্যবহার করা ছাড়া বাইনারি সিস্টেমে আর কোনো সীমাবদ্ধতা নেই। যে কোনো সংখ্যা এই বাইনারি সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায় এবং যে কোনো গাণিতিক প্রক্রিয়া এই বাইনারি সংখ্যা দিয়ে করা সম্ভব।

বাইনারি সংখ্যাতেও প্রত্যেকটি অঙ্কের একটি স্থানীয় মান রয়েছে। দশমিক সংখ্যায় স্থানীয় মান 10^0 , 10^1 , 10^2 ... এভাবে বেড়েছে, বাইনারি সংখ্যাতে 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 ... এভাবে বেড়েছে। ভগ্নাংশ প্রকাশ করার জন্য দশমিক বিন্দুর পর অঙ্কগুলো 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} ... এভাবে কমেছে, ঠিক সেরকম বাইনারি সংখ্যায় বাইনারি বিন্দু (বা র‍্যাডিক্স বিন্দু) 'র পর অঙ্কগুলো 2^{-1} , 2^{-2} , 2^{-3} ... এভাবে কমেছে। তুলনা করার জন্য নিচে দশমিক এবং বাইনারি সংখ্যার একটি উদাহরণ দেওয়া হলো :

দশমিক সংখ্যা									বাইনারি সংখ্যা								
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0		2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓
2	3	5	0	1	.	2	3	7	1	1	0	0	1	.	1	1	0
↑						↑		↑	↑					↑			↑
MSD						দশমিক বিন্দু		LSD	MSB					বাইনারি বিন্দু			LSB

এখানে MSD ও LSD বলতে বোঝানো হয় Most ও Least Significant Digit এবং MSB ও LSB বলতে বোঝানো হয় Most ও Least Significant Bit। দশমিক সংখ্যাটির মতো বাইনারি সংখ্যাটির মান বের করার জন্য আসলে বাইনারি সংখ্যার সাথে তার স্থানীয় মান গুণ দিয়ে সব যোগ করে নিতে হবে।

$$\begin{aligned}
 11001.110)_2 &= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} \\
 &= 16 + 8 + 4 + 0 + 0 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0 \\
 &= (25.75)_{10}
 \end{aligned}$$